JuMlahku
Jurnal Matematika Ilmiah STKIP Muhammadiyah Kuningan
Vol. 5 No.2 November 2019
E-ISSN : 2654-833X
P-ISSN : 2443-3500

Hasil bagi dari jumlahan sepuluh bilangan fibonacci yang berturutan Oleh 11 adalah bilangan fibonacci ketujuh

Glenn Brillian Putra Herman Fernando[a)], Agung Prabowo Putra Ng. Heru Pratikno[b)]

a) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman
email: glennbrillian@gmail.com
b) Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Jenderal Soedirman
email: agung_nghp@yahoo.com

Article Info

Keywords *: Fibonacci number; geometric series, recursive rellation*

Submited: 2019-10-10
Published: 12/4/2019

Abstract

The purpose of this study is to prove that results for the total numbers of ten consecutive Fibonacci divided by 11 is seventh Fibonacci numbers. The research method used is literature study. Proofing the theorem is using the Principles of Mathematical Induction. The research results get a new theorem that the total numbers of ten consecutive Fibonacci divided by 11 is seventh Fibonacci numbers.

Kata Kunci: bilangan Fibonacci, deret geometri, relasi pengulangan

Abstrak

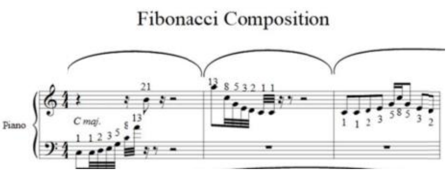
Tujuan penelitian ini adalah membuktikan bahwa penjumlahan sepuluh bilangan Fibonacci yang berturutan apabila dibagi 11 hasilnya adalah bilangan Fibonacci ketujuh dalam susunan bilangan tersebut. Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Pembuktian dilakukan dengan Prinsip Induksi Matematika. Hasil penelitian mendapatkan teorema baru bahwa hasil bagi atas jumlahan sepuluh bilangan Fibonacci yang berturutan oleh 11 adalah bilangan Fibonacci yang ketujuh dalam susunan bilangan tersebut.

PENDAHULUAN

Bilangan Fibonacci ditemukan oleh Leonardo of Pisa, lebih dikenal sebagai Leonardo Fibonacci (Scott and Marketos, 2014). Publikasinya ditulis dalam buku Liber Abaci yang terbit tahun 1202.

Bilangan Fibonacci diperoleh dari penjumlahan dua suku sebelumnya dengan suku awal 0 dan 1. Hasil bagi dua buah bilangan Fibonacci yang berturutan akan konvergen pada angka 1,618 yang disebut golden ratio (Chasnov, 2016).

Penggunaan *golden ratio* antara lain untuk membuat logo dan gambar supaya lebih menarik, memodelkan silsilah lebah madu jantan dan betina, dan lain sebagainya (Prabowo, 2014). van Gend (2014) memberikan contoh penggunaan golden ratio dalam komposisi musik dan lagu.



Gambar 1. Komposisi Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2 (kanan) Sumber Gambar: van Gend (2014)

Luma and Raufi (2010) memperkenalkan relasi antara bilangan Fibonacci dan Lucas untuk penyandian. Salah satu aplikasi terbaru dari bilangan Fibonacci adalah untuk analisis teknikal pada pergerakan nilai tukar mata uang (Andrea, 2017).

Bilangan Fibonacci berkaitan erat dengan relasi perulangan. Relasi perulangan dapat dibentuk dari polinomial karakteristik dan diperoleh penyelesaian umum untuk setiap suku ke-n. Dengan memasukkan suku awal diperoleh penyelesaian khusus dari bentuk bilangan Fibonacci.

Tujuan dari penelitian artikel ini adalah untuk membuktikan penjumlahan sepuluh buah bilangan Fibonacci secara berturut-turut apabila dibagi 11 adalah hasilnya adalah bilangan Fibonacci ketujuh dalam susunan bilangan tersebut.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Teori dasar yang dijelaskan adalah bilangan Fibonacci, relasi perulangan linier homogen orde kedua, dan deret geometri Selanjutnya, pada bilangan Fibonacci dikenakan rumus rekursif untuk mendapatkan rumus bilangan Fibonacci suku ke-n.

Rumus rekursif bilangan Fibonacci dipakai untuk membuktikan jumlahan sepuluh bilangan Fibonacci berturut-turut dibagi 11 didapat bilangan Fibonacci ketujuh dalam susunan bilangan tersebut. Pembuktiannya dilakukan dengan Prinsip Induksi Matematika (PIM).

HASIL DAN PEMBAHASAN

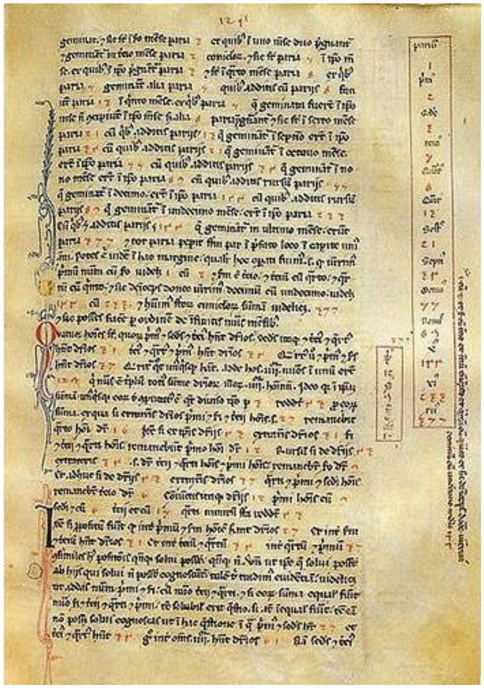
Pada bagian ini dibahas mengenai definisi bilangan Fibonacci, relasi perulangan linier homogen orde dua, deret geometri dan teorema yang diperoleh dalam penelitian ini.

Definisi 1 (Bilangan Fibonacci)
Misalkan suku ke-n dinotasikan dengan a_n. Bilangan Fibonacci ke-n didefinisikan oleh

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2 \qquad (1)$$

dengan $a_0 = 0$ *dan* $a_1 = 1$.

Berdasarkan Definisi 1, beberapa bilangan Fibonacci adalah: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10.946, 17.711, 28.657, 46.368, 75.025, 121.393, 196.418, 317.811, 514.229, 832.040, 1.346.269, 2.178.309, 3.524.578, 5.702.887, 9.227.465, 14.930.352, 24.157.827, 39.088.169, …..



Gambar 2. Sebuah Halaman dari Buku *Fibonacci's Liber Abaci* yang Memuat Bilangan Fibonacci (Kotak Paling Kanan). Ditulis dengan Angka Arab. Sumber Gambar: https://www.learnodo-newtonic.com/fibonacci-facts (13 Oktober 2019).

Jumlah 10 buah bilangan Fibonacci yang berturutan adalah:

$$0+1+1+2+3+5+8+13+21+34=88$$
$$1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143$$

$$1+2+3+5+8+13+21+34+55+89=231$$
$$2+3+5+8+13+21+34+55+89+144=374$$

Dari ilustrasi di atas, diperoleh hasil

$$\sum_{i=0}^{9} a_i = a_{11} - a_1$$

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = a_{12} - a_2$$

$$\sum_{i=2}^{11} a_i = a_{13} - a_3$$

Secara umum, dapat dinyatakan dengan

$$\sum_{i=j}^{k=j+9} a_i = a_{k+2} - a_{k\text{-}8} \quad ; j = 0, 1, 2, ...$$

Jika diperhatikan, hasil-hasil penjumlahan yaitu 88, 143, 231, 374, …. merupakan bilangan-bilangan yang habis dibagi 11. Dengan demikian

$$\frac{1}{11}(0+1+1+2+3+5+8+13+21+34)=8$$
$$\frac{1}{11}(1+1+2+3+5+8+13+21+34+55)=13$$
$$\frac{1}{11}(1+2+3+5+8+13+21+34+55+89)=21$$
$$\frac{1}{11}(2+3+5+8+13+21+34+55+89+144)=34$$

Dari ilustrasi di atas, diperoleh hasil bahwa jumlahan sepuluh buah bilangan Fibonacci yang berturutan apabila dibagi dengan 11 hasilnya merupakan bilangan Fibonacci ketujuh dalam susunan sepuluh buah bilangan Fibonacci tersebut. Hal ini dapat dinyatakan dengan bentuk

$$\frac{1}{11}\sum_{i=j}^{k=j+9} a_i = a_{j+7} \quad ; j = 0, 1, 2, ... \qquad (2)$$

Pada bagian selanjutnya, hasil pada Persamaan (2) akan dibuktikan dengan menggunakan PIM. Namun, sebelumnya dibahas dahulu mengenai relasi perulangan linier homogen orde kedua.

Teorema 1 (Relasi perulangan linier homogen orde kedua)
Misalkan p *dan* q *adalah konstanta. Relasi perulangan linier homogen orde kedua berbentuk adalah*

$$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$$

ekuivalen dengan

$$a_n - pa_{n-1} - qa_{n-2} = 0.$$

Berdasarkan Teorema 1, untuk $q \neq 0$, dapat dibentuk persamaan polinomial kuadrat dari relasi perulangan $\Delta x = x^2 - px - q$ dengan Δx adalah polinomial karakteristik. Persamaan polinomial karakteristik memiliki akar-akar r_1 dan r_2 sebagai berikut

$$r_{1,2} = \frac{-(-p) \pm \sqrt{(-p)^2 - 4(-q)}}{2}$$

Penyelesaian umum dari relasi perulangan diperoleh konstanta C_1 dan C_2 sehingga berlaku

$$a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \qquad r \in \mathbb{R}$$

(bilangan real)

Berdasarkan Definisi 1, Bilangan Fibonacci didefinisikan dengan $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$ *dengan* $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$. Berdasarkan Teorema 1, diperoleh persamaan polinomial karakteristik $\Delta x = x^2 - px - q$. Akar-akar r_1 dan r_2 dari persamaan karakteristik $\Delta x = x^2 - px - q$ adalah:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ dan } r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Berdasarkan Teorema 1 diperoleh penyelesaian umum dari Persamaan (1) adalah

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (3)$$

Untuk $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$, dapat dicari nilai C_1 dan C_2. Untuk $a_0 = 0$ diperoleh

$$C_1 + C_2 = 0 \qquad (4)$$

Untuk $a_1 = 1$, diperoleh

$$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad (5)$$

Dengan substitusi Persamaan (4) ke Persamaan (5), diperoleh $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ dan $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Dengan demikian, diperoleh penyelesaian dari relasi perulangan Fibonacci pada Persamaan (3) dengan mensubstitusikan Persamaan (4) dan (5):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (6)$$

Teorema 2.

Jumlah sepuluh buah bilangan Fibonacci secara berturut-turut dibagi dengan 11 adalah bilangan fibonacci ketujuh dalam susunan bilangan tersebut.

Bukti:

Misalkan s adalah bilangan bulat non negatif dengan a_s suku awal dari 10 buah bilangan Fibonacci. Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s+n} - \sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s+n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{s+6} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{s+6}$$

Pembuktian dengan Prinsip Induksi Matematika dilakukan dengan membuktikan $P(1)$ *benar, dan dengan mengasumsikan bahwa* $P(k)$ *maka akan dibuktikan* $P(k+1)$ *benar. Dengan demikian, benar untuk seluruh* k.

Langkah Inisiasi:

Akan dibuktikan apakah $P(1)$ benar?

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1+6}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1+6}$$

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{7}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{7}$$

$$\frac{1}{11}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)-\left(\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{7}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{7}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(29{,}03444185-0{,}03444185)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(29{,}03444185-0{,}03444185)$$

$$13=13$$

Terbukti $P(1)$ benar.

Langkah Pembuktian:

Jika $s=k$, akan dibuktikan $P(k+1)$ benar jika $P(k)$ benar.

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1+6}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1+6}$$

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1+n}-\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1+n}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+7}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+7}$$

$$\frac{1}{11}\left(\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{7}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{7}$$

$$\frac{1}{11}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{7}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{7}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}(29{,}03444185)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}(-003444185)$$

$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}(29{,}03444185)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\frac{1}{\sqrt{5}}(-003444185)$$

Terbukti bahwa jika dimisalkan $P(k)$ benar, maka $P(k+1)$ benar.

SIMPULAN

Dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa penjumlahan sepuluh buah bilangan Fibonacci secara berturut-turut dibagi 11 adalah bilangan Fibonacci ketujuh dalam susunan bilangan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Chasnov, J. R. (2016). Fibonacci Numbers and the Golden Ratio. Dapat diakses di https://www.math.ust.hk/~machas/fibonacci.pdf (13 Oktober 2019).

Kolkova, A. (2017). *Application of Fibonacci Numbers on the Technical Analysis of EUR/USD Currenct Pair*. Dapat diakses di http://www.researchgate.net/publication/316788630 (13 Oktober 2019).

Lipschutz dan Lipson. (2008). *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*, diterjemahkan Layukallo. Jakarta: Erlangga.

Luma, A. and Raufi, B. (2010). Relationship between Fibonacci and Lucas Sequence and their Application in Symmetric Criptosystem. *Latest Trend on Circuits, System and Signal*. Vol. 1, No. 1, pp. 146-150.

Prabowo, A. (2014). *Matematika Nisbah Emas*. Bandung: Alfabeta.

Scott, T. C. and Marketos, P. (2014). *On the Origin of the Fibonacci Sequence*. Dapat diakses di https://www.researchgate.net/publication/280223479_On_the_Origin_of_the_Fibonacci_sequence (13 *Oktober 2019).*

van Gend, R. (2014). The Fibonacci Sequence and the Golden Ratio in Music. *Note on Number Theory and Discrete Mathematics*. Vol. 20, No. 1, pp. 72-77.